Tesis i treballs de fi de màster

Tesis

- Romero Barbieri Solha va llegir la seva tesi, dirigida per Eva Miranda Galcerán, titulada *On geometric quantisation of integrable systems with singularities*, el dia 21 d'octubre de 2013. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya

En aquesta tesi es presenta un nou enfocament sobre l'estudi de la quantització geomètrica de sistemes integrables. En aquesta tesi s'estenen uns resultats de Guillemin, Kostant, Rawnsley, Sniatycki i Sternberg sobre quantització geomètrica, considerant les fibracions regulars com polaritzacions reals, pel cas singular. Les polaritzacions reals estudiades en aquesta tesi vénen donades per sistemes integrables amb singularitats no degenerades i la definició de quantització geomètrica utilitzada és la donada per Kostant (via grups de cohomologia superiors). També es presenten proves amb un punt de vista unificador de resultats de quantització geomètrica amb òrbites periòdiques utilitzant l'existència d'accions simplèctiques per cercles: les tècniques utilitzades en aquesta tesi subratllen i desembrollen el rol de les accions per cercles en resultats coneguts en quantització geomètrica.

Aquesta tesi és original en els següents aspectes. Primer, s'utilitzen les accions de cercles per obtenir resultats en quantització geomètrica i també s'estudien les obstruccions a l'existència de lemes de Poincaré per cohomologia foliada quan la foliació té singularitats.

Els resultats anteriors obtinguts per Rawnsley sobre accions de cercles no s'han pogut utilizar en el cas en què l'acció no sigui lliure, i no és trivial adaptar-los per tenir en compte els punts fixos. Un cop desenvolupades aquestes tècniques, es calcula la quantització geomètrica en una sèrie de situacions que inclouen el fibrat cotangent d'un cercle i productes d'aquest amb qualsevol varietat simplèctica exacta quantitzada i entorns de singularitats no degenerades d'un sistema integrable (les singularitats hiperbòliques requereixen un estudi diferent perquè no tenen associada cap acció natural per cercles).

Aquests càlculs proven que el complex de Kostant dóna una resolució fina del feix de seccions planes al llarg de la polarització quan la polarització ve donada per un sistema integrable amb singularitats no degenerades. És important destacar que les demostracions són originals, ja que contràriament al que un podria esperar, no hi ha lema de Poincaré per la cohomologia foliada quan la polarització considerada té singularitats. Aquest resultat no trivial és interessant *per se* però en aquesta tesi, només s'inclouen els resultats relacionats amb quantització geomètrica. Per exemple, la necessitat de fer una nova demostració per demostrar que el complex de Kostant dóna una resolució fina del feix de seccions planes al llarg de la polarització.

Aquesta tesi també conté una nova demostració d'un resultat que primer va ser demostrat per Guillemin i Sternberg sobre el caràcter discret de les òrbites de Bohr-Somerfeld. En aquesta demostració no només es destaca el rol jugat per les accions per cercles sinó que també se suprimeix una condició de compacitat de l'enunciat del teorema. L'explotació de l'existència d'accions per cercles culmina amb una demostració alternativa dels teoremes de Sniatycki i Hamilton. Es una demostració original i que pretén unificar les anteriors: l'argument funciona en les dues situacions: fibrats Lagrangians i varietats localment tòriques.

A més a més, aquest punt de vista aporta llum a una conjectura sobre les contribucions de les singularitats de tipus focus-focus. De fet es demostra que, en grau zero, no hi ha cap contribució a la quantització geomètrica provinent de les fibres focus-focus per varietats semitòriques en dimensió 4.

- Elena Tamayo-Mas va llegir la seva tesi, dirigida per Antonio Rodríguez-Ferran, titulada *Continuous-discontinuous modeling for quasi-brittle failure: propagating cracks in a regularized bulk*, el dia 5 de desembre de 2013. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquesta tesi presentem una nova estratègia per tal de descriure el procés de fallida de materials quasi-fràgils, com ara el formigó. Típicament la simulació numèrica d'aquest procés s'ha dut a terme mitjançant models de dany o models de fractura. Els primers —models continus— descriuen la fractura com un procés de localització de deformacions en què el dany creix i es propaga. Els models de fractura, en canvi, són models discontinus que introdueixen de manera explícita discontinuïtats en el camp de desplaçaments. Recentment s'han proposat estratègies que combinen aquestes dues teories clàssiques. Tot i que aquestes formulacions alternatives permeten simular millor el procés de fallida, encara queden alguns aspectes per aclarir, especialment pel que fa al canvi de models —de l'estratègia contínua a la discontínua.

En aquesta tesi es presenta una nova estratègia contínua-discontínua. El nostre principal objectiu és proposar nous mètodes de resoldre tres de les dificultats que presenten aquests models combinats: (1) solucionar la dependència patològica de la malla d'elements finits que presenten els models locals amb reblaniment; (2) determinar la trajectòria de la fissura i (3) assegurar-se que el canvi de models —del continu al discontinu— es fa de manera que les dues estratègies siguin energèticament equivalents.

En primer lloc, ampliem l'ús —per tal de poder simular problemes dos i tres dimensionals— d'una estratègia alternativa que regularitza el reblaniment de les lleis de tensió-deformació. Aquí la no-localitat s'introdueix a nivell del camp de desplaçaments i no a través d'una variable interna com succeeix en les formulacions estàndards. Per aquest motiu, proposem noves condicions de contorn combinades per l'equació de regularització (pel camp de desplaçaments suavitzat). Tal com s'observa en diferents exemples dos i tres dimensionals, aquestes condicions permeten simular de manera físicament realista les primeres etapes del procés de fallida.

En segon lloc, presentem una nova formulació combinada on les fissures es propaguen a través del medi regularitzat. Per tal de definir la trajectòria d'aquestes fissures, utilitzem un criteri geomètric, a diferència dels criteris mecànics clàssics. En particular, sigui $D(\boldsymbol{x})$ un camp regularitzat de dany, les discontinuïtats es propaguen seguint la direcció marcada per l'eix mitjà de la isolínia (o isosuperfície mitjana en 3D) $D(\boldsymbol{x}) = D^*$. És a dir, utilitzem aquí aquesta eina geomètrica —molt emprada en altres aplicacions com ara l'anàlisi d'imatges, la visió artificial o la generació de malles— per tal de propagar les fissures. En aquest cas, donem també exemples dos i tres dimensionals.

Finalment, proposem un nou criteri per estimar l'energia que l'estructura encara no ha dissipat en el moment que canviem de model, per tal que pugui ser transferida a la fissura cohesiva. D'aquesta manera, s'assegura que l'estratègia contínua i la contínua-discontínua siguin energèticament equivalents. En comparació amb altres tècniques, aquesta estratègia té en compte les diferents branques de descàrrega dels models de dany i permet estimar de manera més precisa l'energia que cal transmetre. Per mostrar aquest balanç energètic es duen a terme diferents exemples en una i dues dimensions.

- Johanna Denise García Saldaña va llegir la seva tesi, dirigida per Armengol Gasull, titulada *A qualitative and quantitative study of some planar differential equations*, el dia 25 d'abril de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona

La tesi presentada consta de cinc capítols dividits en dues parts ben diferenciades. La primera està dedicada tant a l'ús de l'anomenat *mètode del balanç harmònic* (MBH) com a la seva fonamentació teòrica. Recordem que aquest mètode és usat sovint per enginyers i físics i proporciona una manera senzilla d'obtenir aproximacions de les solucions periòdiques d'equacions diferencials, així com el seu període. La segona s'ocupa de l'estudi quantitatiu i qualitatiu de dues famílies d'equacions diferencials polinomials al pla.

Entrant amb més detall al seu contingut, direm que als capítols 1 i 2 s'usa l'MBH per trobar aproximacions de l'anomenada funció de període de certes famílies d'equacions diferencials al pla. Aquesta funció és útil ja que apareix a l'estudi de certs models de física i ecologia, així com en l'estudi teòric de certes bifurcacions o en problemes de valor a la frontera. La principal contribució de la tesi en aquest tema ha estat l'estudi analític paral·lel de la funció de període i la constatació que les aproximacions obtingudes via l'MBH recullen moltes de les propietats, tant locals com globals, d'aquesta funció.

Precisament la falta de justificació teòrica dels fets explicats en l'anterior paràgraf ens va fer desenvolupar el capítol 3. En aquest, es demostra que prop de certes aproximacions obtingudes usant l'MBH hi ha solucions periòdiques reals de l'equació diferencial estudiada. Per obtenir els nostres resultats ens vam basar en resultats clàssics d'Urabe (1965) i Stokes (1972).

A la segona part del treball s'aborden problemes quantitatius, dins de l'anomenada *teoria qualitativa de les equacions diferencials*. Més concretament, en ambdós capítols es determinen analíticament fites inferiors i superiors dels valors de bifurcació de dues famílies 1-paramètriques d'equacions diferencials polinomials. La diferència principal entre el capítol 4 i el capítol 5 és que en el primer la família és el que s'anomena una família rotatòria, cosa que comporta que les bifurcacions estiguin més controlades. La segona no ho és i aleshores el problema esdevé més complicat.

Per tal de trobar les fites comentades en el paràgraf anterior s'introdueix un mètode per a la construcció efectiva de corbes algebraiques sense contacte pel flux de l'equació diferencial. Aquestes corbes són bones aproximacions de les separatrius, tant dels punts crítics finits com dels infinits. La comprovació que aquestes corbes són sense contacte passa pel control del signe de famílies 1-paramètriques de polinomis. Per resoldre aquesta qüestió s'introdueix en la tesi el concepte de doble discriminant. Aquest objecte serà útil en l'estudi de molts altres problemes. A més, el control del nombre de cicles límit de les equacions diferencials es fa al treball usant el criteri generalitzat de Bendixson-Dulac. El pas final per veure que aquest criteri es pot aplicar passa també pel control del signe d'un determinat polinomi i de nou el doble discriminant té un paper rellevant.

Els mètodes desenvolupats en aquests dos capítols permeten calcular aproximacions algebraiques de les separatrius dels punts crítics d'equacions diferencials al pla, així com determinar fites dels valors dels paràmetres que hi ha a les famílies d'equacions diferencials perquè aquestes tinguin connexions homoclíniques o heteroclíniques. Idees similars ja s'han aplicat per exemple per determinar l'existència o forma d'ones viatgeres per certes equacions en derivades parcials tipus Fisher-Kolmogorov i poden ser utilitzades en molts altres camps.

- Marta Canadell Cano va llegir la seva tesi, dirigida per Àlex Haro, titulada *Computation of normally hyperbolic invariant manifolds*, el dia 4 de juliol de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona

Els sistemes dinàmics estudien l'evolució dels sistemes respecte del temps. Els objectes invariants organitzen el comportament global d'un sistema dinàmic, els més simples dels quals són els punts fixos i les òrbites periòdiques (així com les seves corresponents varietats invariants). Les *varietats invariants normalment hiperbòliques* (NHIM forma abreviada provinent de l'anglès) són alguns d'aquests objectes invariants. L'objectiu principal d'aquesta tesi és desenvolupar algoritmes eficients pel càlcul d'NHIM, donar-ne resultats teòrics rigorosos i implementar-los per explorar nous fenòmens matemàtics.

Considerem difeomorfismes donats per $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ i un d-tor F-invariant parametritzat per $K\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^m$. És a dir, existeix un difeomorfisme $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ (la dinàmica interna) tal que satisfà l'equació

$$F \circ K = K \circ f, \tag{1}$$

anomenada *equació d'invariància*.

La nostra finalitat és solucionar aquesta equació d'invariància considerant dos possibles escenaris: un en el qual no coneixem quina és la dinàmica interna del tor (on K i f són les nostres incògnites), i un altre en el qual imposem que la dinàmica interna sigui una rotació rígida amb freqüència quasi-periòdica (on K és una incògnita i f és la rotació rígida), pel qual necessitarem, a més a més, afegir un paràmetre ajustador a l'equació (1). En ambdós casos també estarem interessats en el càlcul dels fibrats invariants estables i inestables.

Els algoritmes que hem dissenyat per calcular NHIM estan inspirats en l'anomenat *mètode de la parametrització*, que consisteix a resoldre l'equació d'invariància (1) usant un mètode quasi-Newton aprofitant propietats de reductibilitat. Així, les equacions linealitzades que s'han de resoldre a cada pas del mètode iteratiu es poden reduir a una forma més senzilla (diagonal per blocs), gràcies a la caracterització de les NHIM. D'aquesta manera obtenim algoritmes molt eficients (en velocitat d'execució i requeriments de memòria), ja que les incògnites són funcions de tantes variables com les dimensions de l'objecte invariant (no les dimensions totals de l'espai de fase), i les equacions linealitzades es poden resoldre fàcilment.

Pel cas particular de tors amb dinàmica quasi-periòdica, el mètode implica tant tècniques KAM com tècniques NHIM. En aquest cas, treballem amb famílies d-paramètriques de difeomorfismes analítics. El mètode està basat en un esquema KAM en un format *a-posteriori* per calcular la parametrització del tor amb freqüència fixada (una freqüència diofàntica), on hem d'ajustar paràmetres del model per mantenir fixada la freqüència. Aquest és un mètode constructiu que ens permet elaborar un teorema de validació. Hem desenvolupat un teorema KAM en un format *a-posteriori* per provar la convergència de l'esquema iteratiu i, llavors, provar l'existència d'aquests tors quasi-periòdics normalment hiperbòlics. Així doncs, si tenim una bona aproximació inicial d'un tor quasi-periòdic amb una freqüència diofàntica fixada, aleshores, sota certes condicions d'hiperbolicitat, no-degeneració i no-ressonància, existeix un tor invariant vertader proper a l'inicial per a un cert valor del paràmetre. Emfatitzem que els tors quasi-periòdics obtinguts pel nostre teorema són analítics, en contrast amb els que s'obtenen amb la teoria general de varietats normalment hiperbòliques, que són de diferenciabilitat finita.

Els mètodes d'aquesta tesi són de gran utilitat per a l'estudi de propietats dinàmiques dels sistemes dinàmics, i atesa la precisió numèrica dels algoritmes, s'han pogut implementar en diferents exemples millorant resultats trobats a la literatura de les varietats invariants. S'han implementat ambdós algoritmes per tors de dimensió 1 (és a dir, cercles invariants) en sistemes dinàmics discrets de dimensió 2 i 3, i en el cas de l'algoritme general, elaborat

per a tors amb dinàmica desconeguda, també pel càlcul d'un cilindre normalment invariant en un sistema dinàmic discret de dimensió 4. Tots aquests algoritmes han estat implementats per a la continuació respecte de paràmetres de tors (i cilindres) invariants. En el cas de la continuació de tors quasi-periòdics, s'ha fet per un tor amb freqüència fixada, mentre que en el cas general s'ha realitzat independentment de la dinàmica interna del tor, permetent-nos així creuar ressonàncies. Atès que un tor normalment hiperbòlic és robust sota petites pertorbacions, un dels nostres interessos en les implementacions ha estat estudiar-ne la seva persistència sota pertorbacions i investigar-ne els diferents tipus de trencaments, és a dir, investigar com es perd la hiperbolicitat normal de l'objecte.

- Meritxell Saez Cornellana va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Carles Naranjo i Miguel Angel Barja, titulada *On low degree curves in* $C^{(2)}$, el dia 16 de juliol de 2014. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona

L'n-èssim producte simètric d'una corba algebraica llisa és una varietat algebraica llisa de dimensió n. Aquesta varietat ha estat àmpliament estudiada en ser, juntament amb el producte de corbes, la varietat irregular més simple. El 2011 Mendes-Lopes, Pardini i Pirola publiquen una caracterització sorprenentment simple d'aquestes varietats en dimensió 2 a partir de l'existència d'un divisor amb certes propietats numèriques. En la meva tesi he demostrat una generalització del seu resultat en dimensió arbitrària. A partir de l'existència d'una cadena de subvarietats amb certes propietats, el teorema diu que la varietat ambient és isomorfa al producte simètric d'una corba (de la dimensió corresponent).

D'altra banda, en l'àmbit de la teoria de superfícies irregulars no és conegut quins gèneres poden tenir les corbes immerses en superfícies d'una certa irregularitat ni tampoc la seva geometria. En la part principal de la tesi he estudiat les corbes que viuen en el producte simètric d'una corba. He demostrat que existeix un morfisme d'inclusió $B \xrightarrow{1:1} C^{(2)}$ amb imatge (possiblement singular) de grau d si i només si existeix un diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(2:1)"] \arrow[d, "(d:1)"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

amb determinades propietats. A més, dono un mètode per construir diagrames d'aquest tipus utilitzant l'acció d'un grup finit en una corba (que farà el paper de D en el diagrama). Per tant, no només queden caracteritzades sinó que tenim un mètode per construir-les. Utilitzant aquest resultat en la tesi s'estudien el tipus de singularitats que poden tenir aquestes corbes per graus baixos a més de donar una fórmula per l'autointersecció de B dins de $C^{(2)}$ a partir de les dades del diagrama. En el cas de grau dos, una classificació completa de totes les corbes amb autointersecció positiva es detalla en el cos de la tesi. És interessant remarcar que l'existència d'aquestes corbes implica que la corba C és biel·líptica o hiperel·líptica. Val la pena destacar que per a la realització d'aquesta classificació, un ingredient fonamental ha estat l'acció de grups finits en una corba, ja que per al cas de grau dos, tots els diagrames com l'anterior que apareixen són, de manera natural, fruit de l'acció d'un grup generat per dues involucions en la corba D.

Una pregunta oberta i que ha estat inspiradora per a la realització d'aquesta tesi és la d'estudiar corbes de gènere geomètric entre la irregularitat i dos cops la irregularitat menys 1 en una superfície irregular. Com a conseqüència de la classificació anterior queda demostrat que en el producte simètric d'una corba no hi ha corbes de grau dos amb gènere geomètric en aquest rang.

- Francesc Font Martinez va llegir la seva tesi, dirigida per Timothy Myers, titulada *Beyond the classical Stefan problem*, el dia 18 de juliol de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

L'objectiu principal d'aquesta tesi ha estat estendre la formulació clàssica del problema de Stefan per permetre la modelització de nous fenòmens físics en el camp de les transicions de fase. En particular, l'estudi dut a terme aporta nous aspectes sobre la transició sòlid-líquid en nanopartícules i en la solidificació de líquids sotarefredats. La recerca en la nanoescala ha resultat particularment innovadora, i ha permès donar explicació al comportament de sistemes físics al límit de la teoria del continu. La introducció d'una temperatura variable de canvi de fase ha estat una característica comuna dels models desenvolupats en aquesta tesi, fet que ha portat a la revisió de la formulació estàndard del problema de Stefan d'una fase per garantir la conservació de l'energia.

En els capítols 2 i 3 s'estudia la transició sòlid-líquid d'una nanopartícula, acoblant la relació de Gibbs-Thomson, que descriu la depressió de la temperatura de fusió en una superfície corba, amb l'equació de la calor per la fase sòlida i líquida, i la condició de Stefan. Els resultats obtinguts mitjançant aquest model han permès confirmar la transició ultraràpida de sòlid a líquid observada en els experiments amb nanopartícules [1, 2].

En el capítol 4 es proposa i s'analitza un model matemàtic que descriu la solidificació de líquids sotarefredats, mitjançant la incorporació d'una relació no lineal entre la temperatura de transició i la velocitat del front de solidificació. Entre d'altres, els resultats mostren com la solució clàssica de Neumann és totalment inadecuada per descriure aquest tipus de procés, ja que sobreestima de manera significativa la velocitat del front de solidificació [3].

En els casos en què la temperatura de transició de fase és variable s'ha constatat que la simplificació d'una fase del problema de Stefan no conserva l'energia. En els capítols 5 i 6, s'examinen les diferents reduccions d'una fase del problema de Stefan en el cas en què la temperatura de transició depèn del temps. A més, es deriva un model d'una fase amb temperatura de canvi de fase variable, vàlid per a geometries esfèriques, cilíndriques i planes, que resulta satisfactori en comparar-lo amb la solució del problema de Stefan de dues fases [4, 5].

Referències

[1] F. Font, T. G. Myers, S. L. Mitchell, «A mathematical model for nanoparticle melting with density change». *Microfluidics and Nanofluidics*, DOI: 10.1007/s10404-014-1423-x (2014).

[2] F. Font, T. G. Myers, «Spherically symmetric nanoparticle melting with a variable phase change temperature». *Journal of Nanoparticle Research*, 15 (2013), 2086.

[3] F. Font, S. L. Mitchell, T. G. Myers, «One-dimensional solidification of supercooled melts». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 62 (2013), 411–421.

[4] T. G. Myers, F. Font, «On the one-phase reduction of the Stefan problem with a variable phase change temperature». *International Communications on Heat and Mass Transfer*. (Acceptat, Oct. 2014).

[5] T. G. Myers, S. L. Mitchell, F. Font, «Energy conservation in the one-phase supercooled Stefan problem». *International Communications on Heat and Mass Transfer*, 39 (2012), 1522–1225.

- Abel Gargallo-Peiró va llegir la seva tesi, dirigida per Xevi Roca i Josep Sarrate, titulada *Validation and generation of curved meshes for high-order unstructured methods*, el dia 25 de juliol de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquesta tesi es presenta un nou marc per validar i generar malles corbes d'alt ordre per a models geomètrics complexos. L'aplicació principal dels mètodes proposats és la generació de malles aptes per realitzar anàlisis amb elements finits mitjançant mètodes d'alt ordre no estructurats. És important recalcar que la manca d'un mallador robust i automàtic per a malles corbes és un dels problemes principals que ha obstaculitzat la introducció dels mètodes d'alt ordre a la indústria. Concretament, sense malles corbes d'alt ordre compostes per elements vàlids i tals que encaixin amb el contorn del domini, les taxes de convergència dels mètodes d'alt ordre no es poden assolir. La motivació principal d'aquest treball és, per tant, proporcionar un nou marc que corregeixi aquestes mancances.
En primer lloc, proposem una nova mesura de distorsió (qualitat) per a malles corbes de qualsevol grau polinòmic. Les mesures presentades permeten validar si una malla d'alt ordre és apta per a l'anàlisi d'elements finits amb mètodes d'alt ordre no estructurats. En particular, donat un element d'alt ordre, la mesura de qualitat assigna valor zero si l'element és invàlid, i valor u si l'element es correspon amb la configuració ideal triada (mida i distribució nodal desitjades). A més a més, demostrem que si la qualitat d'un element és major que zero, la regió en la qual el determinant de la jacobiana de l'element és no positiva té mesura zero. Presentem diversos exemples per il·lustrar que les mesures proposades poden ser usades per validar malles d'alt ordre isotròpiques i de capa límit.

En segon lloc, desenvolupem un mètode per suavitzar i desenredar malles d'alt ordre. Específicament, proposem una minimització no lineal global de la mesura de distorsió. La distorsió és regularitzada per permetre desenredar malles que continguin elements invàlids. D'altra banda, el procés d'optimització preserva, quan és possible, diverses característiques geomètriques de la malla lineal (forma dels elements, costats rectes, i mida). Per mitjà de diversos exemples mostrem que la implementació del procés d'optimització és robusta i capaç de lidiar amb configuracions en les quals la malla inicial conté un gran nombre d'elements invàlids. Considerem casos amb malles de fins a grau polinòmic deu, grans deformacions dels contorns corbs, contorns còncaus, i malles de capa límit amb unes grans compressions.

En tercer lloc, estenem la definició de mesura de distorsió i qualitat a malles corbes d'alt ordre amb els nodes en superfícies parametritzades. Usant aquesta definició, proposem també un procediment de suavitat i desenredat per a malles en superfícies CAD. Aquest procediment està expressat en termes de les coordenades paramètriques dels nodes de la malla per imposar que els nodes estiguin sempre sobre la geometria CAD. A la vegada, demostrem que el procediment és independent de la parametrització de la superfície. Per tant, el mètode pot optimitzar malles a superfícies CAD que estiguin definides per parametritzacions de baixa qualitat.

Finalment, proposem un nou mètode per generar malles corbes d'alt ordre, mitjançant un procediment a posteriori. El procediment consisteix a modificar una malla linear introduint primer nodes d'alt ordre. En segon lloc, es desplacen els nodes de contorn per assegurar que estan exactament sobre la superfície CAD. I en tercer lloc, se suavitza i desenreda la malla per obtenir una malla final d'alt ordre corba que sigui vàlida. Finalment, incloem diversos exemples amb què mostrem que les malles generades són aptes per fer anàlisis amb elements finits mitjançant mètodes no estructurats d'alt ordre.

- André Suess va llegir la seva tesi, dirigida per Marta Sanz i Solé, titulada *Contributions to stochastic integration and stochastic partial differential equations*, el dia 5 de setembre de 2014. La tesi correspon al Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona

L'objecte principal d'estudi d'aquesta tesi són les equacions en derivades parcials estocàstiques (EDPE). Aquestes vénen donades per la relació

$$Lu(t,x) = b(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x,u(t,x))\dot{F}(t,x), \tag{1}$$

on L és un operador diferencial parcial (lineal o no lineal), b i σ són funcions reals, i $\dot{F}$ és un soroll aleatori, que es pot entendre com la derivada (distribucional) d'un camp aleatori $F = (F(t,x); (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d)$ en temps i espai amb $T > 0$. Aquest camp aleatori pot tenir correlació en l'espai. En el cas que no tinguem l'argument espacial, l'EDPE (1) es redueix al cas d'equacions diferencials ordinàries estocàstiques. Encara que no estigui escrit explícitament, el soroll F depèn de l'argument aleatori ω, i conseqüentment u també. Com que les trajectòries del camp aleatori F habitualment són irregulars, les trajectòries d'u no pertanyen al domini de l'operador L i l'equació (1) no té sentit. Aquest problema es pot resoldre reformulant (1) com una equació integral, fent servir integrals estocàstiques.
Hi ha diversos mètodes, però el mètode més utilitzat aquí és l'anomenat mètode de *solucions de tipus camp aleatori*. La idea principal és la utilització de la solució fonamental de l'EDP associada a (1), donada per $Lu(t,x) = 0$. Un cop obtinguda, es pot calcular, seguint la teoria clàssica d'EDP, la solució d'una EDP no homogènia utilitzant la convolució del costat dret amb la solució fonamental. En el cas estocàstic, també s'usa aquesta idea i la convolució de la solució fonamental amb el soroll aleatori al costat dret en (1) s'interpreta com una *convolució estocàstica*, en què l'integrador pot ser una mesura aleatòria o un procés estocàstic. Més específicament, utilitzant aquesta idea, l'equació (1) es pot reescriure com l'equació integral

$$u(t,x) = I_0(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t,s,x,y) b(s,y,u(s,y)) dy ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t,s,x,y)\sigma(s,y,u(s,y)) M(ds,dy), \tag{2}$$

on Λ és la solució fonamental de l'EDP associada $Lu = 0$ i M és la mesura martingala associada a F. La forma concreta de la solució fonamental determina de forma crucial com es pot analitzar l'equació integral (2). Pot ser una funció, una distribució no negativa o una distribució no necessàriament no negativa, cada cas està subjecte a certes condicions d'integrabilitat.

Els resultats més importants d'aquesta tesi són la descripció de la llei de probabilitat de la solució $u(t,x)$ a cada punt $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d$. Més específicament, en el cas que Λ és una distribució no necessàriament no negativa, demostem que $u(t,x)$ és diferenciable en el sentit de Malliavin i que la derivada de Malliavin satisfà una EDPE en un espai de Hilbert. A més demostrem que diverses integrals estocàstiques com aquella que apareix en (2) coincideixen i trobem un resultat que permet commutar la integral de Lebesgue i l'operador de la derivada de Malliavin en aquest context. Finalment obtenim que la llei de probabilitat d'$u(t,x)$ és absolutament contínua. En el cas que Λ és una distribució no negativa, considerem una família d'EDPE com (1), en què el soroll F és substituït per εF, amb un paràmetre $\varepsilon \in (0,1]$. Quan $\varepsilon \downarrow 0$, la família de les solucions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1]}$ convergeix puntualment cap a la solució de l'EDP determinista sense el terme de soroll. Per tant, per a tot $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d$, les densitats $p^\varepsilon_{t,x}$ de les distribucions de probabilitat de $u^\varepsilon(t,x)$ haurien de convergir cap a les distribucions de Dirac $\delta_{u^0(t,x)}$. El resultat més important és justificar aquest comportament asimptòtic de les densitats quan $\varepsilon \downarrow 0$ i calcular la velocitat amb què es produeix aquesta convergència. Com a resultat secundari, trobem una caracterització del suport topològic de la distribució de probabilitat de $u(t,x)$ per cada $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

A més demostrem l'existència i unicitat de la solució si L és un operador diferencial hiperbòlic amb coeficients variables i la derivació d'una teoria d'integració estocàstica respecte a processos estocàstics del tipus «solució d'una EDPE».

- Elisa Lorenzo García va llegir la seva tesi, dirigida per Joan-Carles Lario Loyo, titulada *Arithmetic properties of non-hyperelliptic genus* 3 *curves*, el dia 10 de setembre de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquesta tesi s'aborden principalment dos problemes. El primer d'ells és l'estudi d'un mètode per calcular el conjunt de *twists* de corbes no hiperel·líptiques, mentre que el segon se centra en l'estudi de la conjectura de Sato-Tate. En ambdós casos, s'obtenen resultats sobre propietats aritmètiques de corbes no hiperel·líptiques de gènere 3.

1. Propietats aritmètiques de corbes. Per *propietats aritmètiques* d'una corba ens referim a les propietats codificades en la funció L de la corba. En particular, en la informació donada pels seus factors locals, que en els primers de bona reducció es pot interpretar com el polinomi característic de l'endomorfisme de Fröbenius. Dues corbes definides sobre un cos k i isomorfes sobre k tenen per tant les mateixes propietats aritmètiques. Tanmateix, dues corbes definides sobre k i isomorfes sobre $\bar{k}$, i per tant definint el mateix objecte geomètric, poden tenir propietats aritmètiques completament diferents. Així doncs, un bon punt de partida per estudiar les propietats aritmètiques d'una corba és estudiar el conjunt dels seus *twists*.

2. *Twists* de corbes. El càlcul dels *twists* de corbes de gènere 0 i 1 definides sobre cossos de nombres és un resultat clàssic, mentre que el càlcul dels *twists* de corbes de gènere 2 definides sobre un cos de nombres és degut al treball de Cardona i Quer (2001). Totes aquestes corbes resulten ser hiperel·líptiques. A partir de gènere 3, però, això deixa de ser cert i la majoria de corbes són no hiperel·líptiques.

En aquesta tesi es desenvolupa un mètode que permet calcular el conjunt de *twists* d'una corba no hiperel·líptica i les equacions que els defineixen. El mètode es basa en una correspondència entre el conjunt de *twists* i el conjunt de solucions a un problema d'immersió de Galois. El mètode per calcular les equacions explícites dels *twists* es basa en l'estudi d'una certa representació de Galois en el conjunt de diferencials regulars de la corba de partida.
Com a aplicació d'aquest mètode, a la tesi es calculen els *twists* de les corbes no hiperel·líptiques de gènere 3. És a dir, de les quàrtiques planes llises definides sobre un cos de nombres arbitrari. Abans de poder aplicar el mètode ha calgut donar una descripció particularment precisa de l'estratificació per grup d'automorfismes de l'espai de mòduli de corbes de gènere 3. D'aquesta manera oferim el que hem anomenat classificació modificada de Henn de quàrtiques planes llises amb grup d'automorfismes no trivial.

3. La conjectura de Sato-Tate. La darrera part de la tesi està dedicada a l'estudi de la conjectura de Sato-Tate. Aquesta conjectura prediu la distribució del nombre de punts racionals sobre cossos finits d'una corba donada en termes del seu grup de Sato-Tate. S'ha demostrat la conjectura per al conjunt de *twists* de les quàrtiques de Fermat i de Klein, i a més s'han calculat explícitament els grups i les distribucions de Sato-Tate corresponents. Així, es mostren doncs nous exemples de distribucions de Sato-Tate.
Finalment, s'ha estudiat també la conjectura de Sato-Tate en el cas particular de les hipersuperfícies de Fermat. Sota certes condicions, s'ha demostrat la conjectura per a aquesta família, i s'ha dissenyat un algorisme per al càlcul explícit dels grups i les distribucions de Sato-Tate per a cada hipersuperfície de Fermat. A més, s'enuncia una conjectura amb una fórmula tancada per al grup de Sato-Tate.

- Pedro Daniel Prieto Martínez va llegir la seva tesi, dirigida per Narciso Román Roy, titulada *Geometrical structures of higher-order dynamical systems and field theories*, el dia 2 d'octubre de 2014. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

La física geomètrica és una branca relativament jove de la matemàtica aplicada que es va iniciar als anys seixanta i setanta quan A. Lichnerowicz, W. M. Tulczyjew i J. M. Souriau, entre molts altres, van començar a estudiar diversos problemes en física usant mètodes de geometria diferencial. Aquesta «geometrització» proporciona una manera d'analitzar les característiques dels sistemes físics des d'una perspectiva global, obtenint així propietats qualitatives que faciliten la integració de les equacions que els descriuen.

Des d'aleshores s'ha produït un fort desenvolupament en el tractament intrínsec d'una gran varietat de problemes en física teòrica, matemàtica aplicada i teoria de control usant mètodes de geometria diferencial. Gran part del treball dut a terme en la física geomètrica des dels seus primers dies s'ha centrat en l'estudi de teories de primer ordre, és a dir, models físics tals que la informació física depèn de, com a molt, derivades de primer ordre de les coordenades de posició generalitzades (velocitats). Tanmateix, hi ha teories en física en les quals la informació física depèn de manera explícita d'acceleracions o derivades d'ordre superior de les coordenades de posició generalitzades, requerint, per tant, eines geomètriques més sofisticades per modelar-les de manera acurada.

Els sistemes dinàmics d'ordre superior juguen un paper molt rellevant en certes branques de la física teòrica, la matemàtica aplicada i l'anàlisi numèrica. En particular, apareixen en la descripció matemàtica de la interacció de partícules relativistes amb *spin*, en models de teories de cordes de Polyakov i d'altres, en el lagrangià de Hilbert per a la teoria de la gravitació, en la generalització de l'electromagnetisme de Podolsky, i en molts altres sistemes. D'altra banda, els sistemes d'ordre superior també apareixen en alguns problemes de mecànica de fluids i física clàssica, i en models numèrics obtinguts mitjançant la discretització de sistemes dinàmics de primer ordre que preservin les estructures geomètriques inherents al sistema. En aquest tipus de teories, la informació física té dependència explícita d'acceleracions o derivades d'ordre superior de les coordenades de posició generalitzades.

L'objectiu d'aquesta tesi doctoral ha estat obtenir models geomètrics d'algunes d'aquestes teories físiques. En particular, hem modelat sistemes dinàmics i teories de camps tals que la seva informació dinàmica ve donada en termes d'una funció lagrangiana, o d'un hamiltonià que prové d'un sistema lagrangià. Per ser més precisos hem emprat la formulació unificada Lagrangiana-Hamiltoniana per tal de desenvolupar marcs geomètrics adequats per a sistemes dinàmics d'ordre superior autònoms i no autònoms, i per a teories de camps de segon ordre. Mitjançant aquests marcs geomètrics hem estudiat alguns exemples físics rellevants i algunes aplicacions, com la teoria de Hamilton-Jacobi per a sistemes mecànics d'ordre superior, partícules relativistes amb *spin* i problemes de deformació en mecànica, així com l'equació de Korteweg–de Vries i altres sistemes en teories de camps.